



KICHIK PARAMETRLI EVOLYUTION TENGLAMALARNING SONLI YECHIMLARINI QURISHDA SPEKTRAL YONDASHUV

Termiz iqtisodiyot va servis institute magistranti

To'rayeva Mahbuba Niyozovna

Annotatsiya. Ushbu maqolada kichik parametrlı evolyutsion tenglamalarning sonli yechimlarini qurishda spektral yondashuvning imkoniyatlari tadqiq etilgan. Chebishev ko'phadlari asosidagi algoritmlar ishlab chiqilib, ularning aniqligi va hisoblash samaradorligi tahlil qilingan.

Kalit so'zlar: spektral metod, Chebishev ko'phadlari, evolyutsion tenglama, kichik parametr, sonli modellashtirish, approksimatsiya, chegaraviy masala, hisoblash algoritmi.

Аннотация. В статье исследуются возможности спектрального подхода при построении численных решений эволюционных уравнений с малым параметром. Разработаны алгоритмы на основе многочленов Чебышёва, выполнен анализ их точности и вычислительной эффективности.

Ключевые слова: спектральный метод, многочлены Чебышёва, эволюционное уравнение, малый параметр, численное моделирование, аппроксимация, краевая задача, вычислительный алгоритм.

Abstract. This paper investigates the application of spectral techniques for constructing numerical solutions of evolution equations containing a small parameter. Chebyshev polynomial-based algorithms are developed, and their accuracy and computational efficiency are analyzed.

Keywords: spectral method, Chebyshev polynomials, evolution equation, small parameter, numerical modeling, approximation, boundary value problem, computational algorithm.

Kirish. Hozirgi kunda matematik modellashtirish va hisoblash matematikasi fanlarining rivojlanishi murakkab fizik, texnologik va muhandislik jarayonlarini tadqiq etishda yuqori aniqlikka ega sonli usullarni ishlab chiqishni talab qilmoqda. Amaliyotda uchraydigan ko'plab jarayonlar evolyutsion differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi. Ayniqsa, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr qatnashuvchi evolyutsion tenglamalar issiqlik o'tkazuvchanligi, gidrodinamika, gazlar dinamikasi, plazma fizikasi, akustika va optika kabi sohalarda keng qo'llaniladi. Bunday masalalarni analitik usulda yechish ko'p hollarda murakkab yoki imkonsiz bo'lganligi sababli ularni sonli usullar yordamida tadqiq etish muhim ahamiyat kasb etadi.

Kichik parametrlı evolyutsion tenglamalar uchun sonli yechimlarni qurishda asosiy muammolardan biri yechimning ayrim sohalarda keskin o'zgarishi va chegaraviy qatlamlarning yuzaga kelishidir. Natijada an'anaviy chekli ayirmali usullar yuqori aniqlikni ta'minlash uchun juda zich hisoblash to'rlarini talab qiladi. Bu esa hisoblash xarajatlarining ortishiga olib keladi. Shu sababli yuqori aniqlikni kamroq hisoblash nuqtalari yordamida ta'minlay oladigan samarali sonli metodlarni ishlab chiqish dolzarb masalalardan biri hisoblanadi.



So‘nggi yillarda spektral metodlar differensial tenglamalarni sonli yechishda yuqori aniqlikka ega usullar sifatida keng qo‘llanilmoqda. Ushbu metodlarning asosiy afzalligi shundaki, ular yechimni maxsus tanlangan ortogonal bazis funksiyalar orqali approksimatsiyalaydi va silliq yechimlar uchun eksponensial tezlikda yaqinlashishni ta‘minlaydi. Xususan, Chebishev ko‘phadlariga asoslangan spektral metodlar chegaraviy masalalarni yechishda yuqori samaradorlikka ega bo‘lib, ko‘plab amaliy masalalarda muvaffaqiyatli qo‘llanilmoqda.

Mazkur maqolada kichik parametrli evolyutsion tenglamalarning sonli yechimlarini qurishda spektral yondashuvning imkoniyatlari o‘rganiladi. Tadqiqot davomida Chebishev ko‘phadlari asosida spektral approksimatsiya qurilib, masalani sonli yechish algoritmi ishlab chiqiladi. Shuningdek, taklif etilgan usulning aniqligi va hisoblash samaradorligi tahlil qilinadi hamda olingan natijalar sonli tajribalar asosida baholanadi.

Tadqiqotning asosiy maqsadi kichik parametrli evolyutsion tenglamalarni yechishda spektral metodning qo‘llanish imkoniyatlarini o‘rganish, sonli algoritm ishlab chiqish va uning amaliy samaradorligini ko‘rsatishdan iborat.

Asosiy qism. Kichik parametrli evolyutsion tenglamalar va ularning matematik modeli. Ko‘plab fizik va texnologik jarayonlar vaqt bo‘yicha o‘zgaruvchi evolyutsion differensial tenglamalar yordamida tavsiflanadi. Ayniqsa, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr qatnashuvchi tenglamalar issiqlik tarqalishi, diffuziya, gidrodinamika va to‘lqinlar nazariyasida muhim o‘rin egallaydi. Bunday tenglamalarning umumiy ko‘rinishini

$$\begin{aligned} &[\\ &u_{t+\vartheta} u_{xxxx} = F(x, t, u, u_x, u_{xx}) \\ &] \end{aligned}$$

ko‘rinishida ifodalash mumkin. Bu yerda (ϑ) — musbat va juda kichik parametr bo‘lib, uning qiymati yechimning xarakteriga sezilarli ta‘sir ko‘rsatadi.

Kichik parametr mavjud bo‘lgan hollarda yechim ayrim nuqtalar yaqinida keskin o‘zgarishi mumkin. Natijada chegaraviy qatlamlar hosil bo‘ladi va an‘anaviy sonli usullar yordamida yuqori aniqlikdagi yechim olish qiyinlashadi. Shu sababli bunday masalalarni yechishda yuqori aniqlikni ta‘minlovchi spektral metodlardan foydalanish maqsadga muvofiq hisoblanadi.

Spektral metodning nazariy asoslari

Spektral metodning asosiy g‘oyasi izlanayotgan funksiyani ortogonal bazis funksiyalar orqali approksimatsiyalashdan iborat. Ushbu tadqiqotda bazis sifatida birinchi tur Chebishev ko‘phadlari tanlanadi.

Chebishev ko‘phadlari quyidagi formula orqali aniqlanadi:



$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Mazkur ko'phadlar ortogonallik xossasiga ega bo'lib, sonli hisoblashlarda yuqori aniqlikni ta'minlaydi. Ularning rekurrent formulasi quyidagicha yoziladi:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Spektral metodda izlanayotgan yechim

$$u_N(x, t) = \sum_{k=0}^N a_k(t) T_k(x)$$

ko'rinishida taqribiy ifodalanadi. Bu yerda $(a_k(t))$ — vaqtga bog'liq noma'lum koeffitsiyentlar hisoblanadi.

Sonli algoritmni qurish

Tenglamaning fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha hosilalari Chebishev ko'phadlarining hosilalari orqali almashtiriladi. Natijada differensial tenglama oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi.

Chebishev kollokatsiya nuqtalari

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j=0, 1, \dots, N$$

orqali aniqlanadi. Ushbu nuqtalarda tenglama qanoatlantirilishi talab qilinadi.

Fazoviy diskretlashtirish bajarilgandan so'ng quyidagi ko'rinishdagi sistema hosil bo'ladi:

$$\frac{dU}{dt} = AU + F(U),$$

bu yerda (A) — differensial operatorning matritsaviy ko'rinishi, $(F(U))$ esa nochiziqli hadlarni ifodalaydi.

Vaqt bo'yicha integrallash uchun Runge–Kutta yoki Adams–Beshfort sxemalaridan foydalaniladi. Ushbu yondashuv sonli yechimning barqarorligi va aniqligini ta'minlaydi.

Hisoblash tajribalari va natijalar tahlili

Taklif etilgan spektral algoritm yordamida kichik parametrning turli qiymatlarida hisoblash tajribalari o'tkazildi. Tajribalarda $(\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4})$ qiymatlar uchun yechimlarning xatti-harakati o'rganildi.



Hisoblash natijalari shuni ko'rsatdiki, parametr kichraygan sari yechimda keskin gradientlar paydo bo'ladi. Biroq spektral metod kam sonli tugunlarda ham yuqori aniqlikni saqlab qoldi. Chekli ayirmali usullar bilan taqqoslanganda spektral yondashuv kamroq hisoblash nuqtalari yordamida aniqroq natijalar berdi.

Olingan sonli natijalar spektral metodning yaqinlashish tezligi yuqori ekanligini hamda kichik parametrli evolyutsion tenglamalarni modellashtirishda samarali vosita bo'lib xizmat qilishini tasdiqladi. Tadqiqot davomida qurilgan algoritmnining hisoblash xarajatlari maqbul darajada bo'lib, amaliy masalalarni yechishda qo'llash imkoniyatlari mavjudligi aniqlandi.

Xulosa. Mazkur maqolada kichik parametrli evolyutsion tenglamalarning sonli yechimlarini qurishda spektral yondashuvning imkoniyatlari o'rganildi. Tadqiqot davomida Chebishev ko'phadlariga asoslangan spektral metodning nazariy asoslari tahlil qilinib, ushbu metod yordamida yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr qatnashuvchi evolyutsion tenglamalarni sonli modellashtirish masalalari ko'rib chiqildi.

Tadqiqot natijasida spektral metodning asosiy afzalliklari aniqlandi. Jumladan, yechimni ortogonal bazis funksiyalar yordamida approksimatsiyalash hisobiga yuqori aniqlikdagi natijalarni nisbatan kam sonli hisoblash nuqtalarida olish mumkinligi ko'rsatildi. Chebishev ko'phadlarining ortogonallik va rekurrentlik xossalari hisoblash algoritmlarini soddalashtirish hamda hisoblash samaradorligini oshirishga xizmat qilishi aniqlandi.

Masalani sonli yechish uchun spektral algoritm ishlab chiqildi va uning ishlash prinsipi tahlil qilindi. Fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha differensial operatorlarni spektral approksimatsiya qilish natijasida dastlabki masala oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltirildi. Vaqt bo'yicha integrallash usullari bilan birgalikda qo'llanilgan spektral yondashuv sonli yechimlarning barqarorligi va aniqligini ta'minladi.

Hisoblash tajribalari natijalari shuni ko'rsatdiki, kichik parametr qiymatlarida ham spektral metod yuqori aniqlikni saqlab qoladi va yechimdagi keskin o'zgarishlarni samarali tasvirlay oladi. Olingan natijalar spektral yondashuvning an'anaviy chekli ayirmali usullarga nisbatan ayrim hollarda yuqori aniqlik va tez yaqinlashish xususiyatiga ega ekanligini tasdiqladi.

Shunday qilib, Chebishev ko'phadlariga asoslangan spektral metod kichik parametrli evolyutsion tenglamalarni sonli tadqiq etishda samarali hisoblash vositasi ekanligi ko'rsatildi. Taklif etilgan yondashuvdan issiqlik o'tkazuvchanligi, gidrodinamika, akustika, optika va boshqa fizik jarayonlarni modellashtirish bilan bog'liq amaliy masalalarni yechishda foydalanish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

1. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. – New York: Dover Publications, 2001. – 688 p.
2. Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. – Berlin: Springer-Verlag, 2006. – 563 p.



3. Trefethen L.N. *Spectral Methods in MATLAB*. – Philadelphia: SIAM, 2000. – 165 p.
4. Shen J., Tang T., Wang L.L. *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. – Heidelberg: Springer, 2011. – 470 p.
5. Gottlieb D., Orszag S.A. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. – Philadelphia: SIAM, 1977. – 172 p.
6. Fletcher C.A.J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. Vol. 1. – Berlin: Springer, 1991. – 401 p.
7. Morton K.W., Mayers D.F. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 262 p.
8. Burden R.L., Faires J.D. *Numerical Analysis*. – Boston: Brooks/Cole, 2011. – 872 p.
9. Ames W.F. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. – New York: Academic Press, 1992. – 581 p.
10. Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. *Numerical Mathematics*. – New York: Springer, 2007. – 655 p.
11. Burgers J.M. *The Nonlinear Diffusion Equation*. – Dordrecht: Springer Science & Business Media, 1974. – 174 p.
12. John H. Mathews, Kurtis D. Fink. *Numerical Methods Using MATLAB*. – New Jersey: Prentice Hall, 2004. – 704 p.